# 定性推論とその応用: 実行可能な知識体系の構築を目指して

西田豊明

京都大学 工学部 情報工学教室
京都市左京区吉田本町
email: nishida@kuis.kyoto-u.ac.jp

概要

人工知能の一部門に定性推論と呼ばれる分野がある。定性推論の研究の目的は人間の定性的な思考過程の分析・モデル化・ソフトウェア化・応用である。本稿では、定性推論の研究の位置づけと概要紹介を行った後、我々の研究室で取り組んでいる微分方程式の相肖像解析の研究を紹介する。

## 1 定性推論の研究

定性推論 (Qualitative Reasoning) という研究分野は、物理学、化学、生物学、経済学などの、様々な領域における「定性的な思考」に焦点をあてて、その思考の分析、モデル化、コンピュータ上での実現、その応用について人工知能の手法を用いて研究しようという、分野横断的・学際的な研究領域である。

定性推論という研究領域が世界の研究者に広く認知され、定性推論に関する本格的な研究が開始したのは 1984 年に Artificial Intelligence 誌に特集号が組まれてからであるので、まだ非常に若い、それゆえに大変魅力のある研究領域である。その後、欧米を中心に多数の人工知能以外の分野の研究者が参加し、急速に研究が進展している。

これまで主として取り組まれてきた対象は、物理、化学、生体、経済などの分野における動的システムである。特に、初期の研究では物理的な現象の取扱いへの関心が高かったので、「定性推論」のかわりに「定性物理」(Qualitative Physics) という用語が使われることもあり、国際的にはこちらの呼称の方が通っている。

人工知能の他の領域と同様に、定性推論の研究者の関心は次の 4 つに分けられる。

- 認知科学的視点：人間の定性的思考の分析とモデル化。
- 数学的視点：定性的思考の形式的理論。
- 計算論的視点：定性的思考の計算論的視点からの形式化とそれに基づく推論方式の設計。
- 応用的視点：定性推論の解析、診断、制御、設計、教示などの知的問題解決への応用。

定性推論の分野におけるこれまでの研究成果は次の 8 項目に分類できる[1]。

- 定性シミュレーション：与えられた動的システムの挙動を定性的な情報に基づいて予測する技術。
- 相肖像解析：定性的な解析と定量的な解析を統合して動的システムの相肖像を幾何学的に解析することによって挙動の概要を求める技術。
- 比較解析：動的システムに含まれるパラメータを変化させたとき系の挙動がどのように変化するかを解析し、説明するための技術。
- 因果解析：系の内部構造を解析することによって、系の動作メカニズムを因果的に理解したり、それに基づいて挙動解析を行うための手法。
- メンタルモデル：人間の直感や常識の表現とそれに基づく推論の定式化。

[1] 詳細については、情報処理学会誌 Vol. 23, No. 2 (1991 年 2 月号) を参照されたい。

- 自動モデリング：与えられた現象を記述するための適切なモデルを自動的に生成する技術。
- 問題指向の定性推論：空間、確率的事象、波の伝播など現象への依存性の高い定性モデリングとその解析法。
- 問題解決アルゴリズムとのインターフェース：診断、設計など各種応用との間のインターフェースのアーキテクチャ。

これらのうち、どれが本質的であるかを特定するのは現時点では難しい。長期的な研究が必要であろう。

## 2 定性推論 ⊂ 人工知能 ⊂ 情報科学?

前の節に述べたことがなぜ情報科学において重要であるのか、もう少し広い観点から考えてみよう。

**問題の所在** いま多くの出版物が電子化されようとしている。それにともなって出版物のあり方もこれまで書籍という物理的な制約から解放され、ハイパーメディアへと向かいつつある。さまざまなマルチメディア技術の発達によって、必要な情報を検索したり、検索された情報を効果的に人間に提示する技術はこれから数年で飛躍的に進歩するであろう。特に、How Things Work [7]、分子生物学 [4]、情報科学辞典 [9] といったある分野における知識への概要とインデクスを網羅した総覧がハイパーメディア化されれば、我々は先人の偉大な考えにこれまでよりはるかに容易にアクセスすることができるようになるにちがいない。

しかし、たとえこれらがハイパーテキスト化されても、だれでもがすぐに量子力学の知識を使って新素子の設計がはじめられるわけでも、カオスやフラクタルの理解ができるわけでも、機械翻訳のプログラムを作れるわけでもない。電子化された書物が知識として機能するためには、書かれていることを解釈する能力を持つエージェントの存在が依然として必須である。そして、今のところそのような能力を持つエージェントは人間に限られている。しかも、書物の内容が読者の専門外の別の専門分野のことであれば、その内容を理解して役立てるためには膨大な努力が必要である。結局、ハイパーテキスト化された知識は依然として「絵に描いた餅」であり、コンピュータはそれを問題解決に直接利用することができない。このような知識をコンピュータが問題解決に利用できるようになると、コンピュータの問題解決能力は飛躍的に高まり、今日よりもはるかに高度な仕事をさせることができるようになる。

人間の思考能力や知識をコンピュータのような抽象機械に持たせるにはどのようにしたらよいかを考えるのが、工学サイドの人工知能研究者の主な仕事である。

**人工知能のアプローチと定性推論** 工学サイドの人工知能研究では、人間の知識や思考を表現するための表現形式とその上での問題解決アルゴリズムを探求する。現在まで、この試みは小さな領域からはじめて少しずつ拡張されつつある。たとえ狭い領域でも、十分有用であることがこれまでのエキスパートシステムや機械翻訳の研究で実証されつつある。

人工知能の研究で取り上げるのは、ほかの情報科学の分野で取り上げられてきた題材より、より人間に近い、定式化が十分に行われていなかったり、非常に高度の知能を要求されたりする、いわゆる “ill-formed problems” である[2]。

例えば、定性推論のテーマの一つである動的システムの挙動解析に関していうと、現在広く普及している数値計算法が対象モデルの解析と挙動予測において果たす役割は大きいが、数値計算で全ての問題が解決されているわけではない [1]。計算条件の設定、結果の解釈、再計算のプランニングなど、高度な判断を必要とする作業は、専門家によって行われてきた。今までこのような高度な知的作業の手順のアルゴリズム化は行なわれておらず、今のところこの問題は ill-formed problem である。従って、この問題は人工知能、特に定性推論の研究テーマとなる。

**定性推論の応用 — 故障診断** 上に述べた動的システムの定性的な挙動予測が実現されると人工知能の手法の適用範囲がかなり広がる。例えば、de Kleer と Williams が提案した汎用診断エンジン (GDE: General Diagnostic Engine) の枠組み [3] を使って、故障の診断をするプログラムを実現できる。GDE は、(a) 従来のように経験則やノウハウに基づくのではなく、対象モデルに基づいた体系的な故障診断アルゴリズムである、(b) 各部品の正常な動作モデル以外に故障パターンを予め与えておかなくても診断が可能である、(c) 原理的には多重故障に対応できる、など多くの特色をもつ。

GDE は入力として、デバイスの物理構造、デバイスを構成する各部品のモデル、モデル - デバイス間の可能な解の集合、計測の集合を取り、出力として故障仮説を生成する。GDE では与えられた仮定と観測からデバイスのモデルを用いて設計値を計算する挙動予測サブシステムの存在を仮定している。

[2] Well-formed problems の取扱いについては、その形式的取扱い、一般化、計算理論的取扱いなどが人工知能以外の情報科学の分野で取り上げられている。

GDEの故障診断のアルゴリズムを簡単に紹介しよう。挙動予測で得られた設計値と実際のデバイスの食い違いを症状(symptom)と呼ぶ。症状が顕在化したとき、矛盾した命題に根拠を与える仮定の集合を衝突(conflict)と呼ぶ。衝突$C$に対して$C \subset C'$なる$C'$もまた衝突である。衝突を簡潔に表すため、極小衝突(minimal conflict)が用いられる。極小衝突とは、そのいかなる真部分集合も衝突でない衝突である。極小衝突の集合$C = \{\ldots C_i \ldots\}$は、与えられた衝突の集まり$C'$に属する任意の衝突$C'_j$に対して$C_i \subseteq C'_j$なる$C_i \in C$が必ず存在するとき極小集合の完全集合と呼ばれる。

故障仮説は次のように表現する。診断対象において故障の生じ得る部品や部品間の結合$\alpha$が実際に故障しているという仮説を$A_\alpha$と表そう。部品または部品間の結合$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$が全て故障していると仮定すれば、観測された全ての症状が説明できるとき、集合$\{A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$を候補(candidate)と呼ぶ。衝突の場合と同様に、$C_i$が候補であれば、$C_j \supset C_i$なる$C_j$もまた候補である。そのいかなる部分集合も候補でない候補を極小候補と呼ぶ。極小候補の集合$C = \{\ldots C_i \ldots\}$は、任意の候補$R$に対して$C_i \subseteq R$なる$C_i \in C$が必ず存在するとき、極小候補の完全集合と呼ばれる。GDEの生成する故障仮説は極小候補の完全集合として表現されている。

GDEによる故障診断は、衝突認識(conflict recognition)と、候補生成(candidate generation)の2段階で行われる。衝突の認識では、デバイスのモデルから予測された挙動と診断対象を観測して得られた挙動を比較して症状を試み、症状が見つかれば極小衝突の完全集合を生成する。候補生成では極小衝突の完全集合から、極小候補の完全集合を生成する。

GDEの枠組みは非常に一般的である。挙動予測器は観測された挙動が予測された通りのものでないことを指摘するための予測情報を生成できるものであれば何でもよい。定性推論で提供される定性シミュレータは精密な予測情報は生成できないが、一般に少ない計算量で挙動のおよその様子を予測できるので上のような目的には適している。IBMパリ研究所のDagueらの作成したDEDALEというプログラム[2]では量の大きさの程度に関する推論(Order of Magnitude Reasoning, OMR) [8]を利用している。OMRでは、量の大きさの程度を表現するために3種類の関係:

$x \ll y$: $x$は$y$に対して無視できる。

$x \cong y$: $x$と$y$はオーダが等しく、かつ$x-y$の大きさが$x$と$y$のオーダからみると無視できる。

$x \sim y$: $x$と$y$のオーダは等しいが、$x-y$の大きさは$x$と$y$のオーダに対して無視できない。

が用いられる。また、これらの関係に関する推論規則(例えば、$x \sim y \wedge y \ll z \rightarrow x \ll z$)が与えられている。Dagueらは OMR の記述法を使って、さまざまなモードで動作するトランジスタの正常なふるまいのパターンを、ある標準的なふるまいのパターンを基準にして記述し、これと観測された回路の挙動を比較することによって故障した部品の可能性を絞り込む方式を提案している。Dagueらは、この方法を回路製造を行なっている工場で実際に評価し、よい結果が得られたと報告している[2]。同様のアイデアは、設計や制御など他のタイプの工学的問題解決にも応用されつつある。

## 3 微分方程式の相肖像解析の自動化

上にも述べたように、様々な工学的問題解決では、対象モデルの解析と挙動予測は重要なステップである。これまで専門家によって行われてきた高度な判断も含めて、対象モデルの解析と挙動予測を自動的に実行することのできるシステムを構築するためにはどのような技術が必要であろうか。第一に、数値計算と知識情報処理の技術の両方が必要であるのは明白であるが、単に両者を寄せ集めるだけではなく、一定の原理のもとに両者を統合しなければならない。第二に、非線形性を含む複雑なモデルを解析するとき、解析に必要な情報が必ずしも得られないことを考慮に入れる必要がある。さらに、一般的問題として、情報をどのように表現すればよいか、それによってどのような推論を行なえばよいかという計算論的な観点からの考察が必要になる。

我々の研究室では、微分方程式の定性的挙動の自動解析をするコンピュータプログラムの実現をめざして研究を進めてきた。1989年は2次元区分線形微分方程式[10, 11, 12]、1990年は2次元平面上で定義された一般の構造安定な常微分方程式を対象としたプログラムを試作した[5, 6]。

この節では、2個の独立変数の上に定義された構造安定な(非線形)常微分方程式の挙動の定性的特徴、すなわち様々な初期条件のもとで示す大域的挙動予測を行うプログラムPSX2NLの概要について述べる。

我々の手法の特色は次の通りである。

- 相空間の与えられた領域において近傍にある解曲線の区間を集積した軌道区間束という概念と、軌道区間束の位相構造を記述するための流れパターンという表現形式を導入し、両者が大域的挙動予測に有効であることを示した。

- 相空間の与えられた領域における、構造安定な 2 次元微分方程式の流れパターンの幾何学的特徴を分析し、可能な全ての流れパターンを生成する文法（流れ文法）と、流れ文法に基づく流れパターン枚挙アルゴリズムを示した。これは、非線形性のために生じる情報の不完全性を補う有用な制約となる。

- 相空間の与えられた領域に対して、与えられた微分方程式の流れパターンを生成するアルゴリズムを示した。このアルゴリズムでは、まず数値計算を用いて流れパターンを直接求めようとする。この過程で必要な情報が得られずに実行が閉塞されると、流れパターン枚挙器を用いて、与えられた流れに最も近い流れパターンを探し出すトップダウンの方法に切り換える。

以上の考えに基づいて Common Lisp 処理の上に PSX2NL と名付けた大域的挙動予測器を試作した。PSX2NL は 2 次元平面上に定義された常微分方程式と相空間内の凸多角形で囲まれた有界連続領域（セル）の記述を受け取り、その領域内の軌道を定性的特徴によって分類する。この結果は以下に示す流れパターンという形式で記述する。

## 3.1 流れパターン

一般にセル $C$ 内の軌道は、$t \to \pm\infty$ のとき $C$ 内にある $\alpha$ または $\omega$ 極限集合に漸近するか、$C$ の境界 $\partial C$ に達するかのいずれかである。$C$ に含まれる軌道区間のうちで近傍にあるものを集積したものを $C$ に関する軌道区間束という。形式的には、セル $C$ 内部にある軌道区間の集合 $\phi$ が軌道区間束であるための条件は次の通りである。

$$\forall \phi_a, \phi_b \in \phi, 0 < r \in \mathrm{R}, \exists \phi_1, \dots \phi_n \in \phi \left[ d(\phi_a, \phi_1) < r \wedge \bigwedge_{i-1}^{n-1} d(\phi_i, \phi_{j+1}) < r \wedge d(\phi_n, \phi_b) < r \right]$$

ただし、$d(\phi, \psi) < r$ であるための条件は、$\forall t[\phi(t) \in C \to \exists u[\psi(u) \in C \wedge |\phi(t) - \psi(u)| < r]]$ かつ $\forall t[\psi(t) \in C \to \exists u[\phi(u) \in C \wedge |\psi(t) - \phi(u)| < r]]$ である。

軌道区間束 $\phi$ は、

$$\phi : s \to d$$

という形式で表す。これを流れ写像と呼ぶ。ここで $s$ は、$\phi$ に含まれる軌道区間の $\alpha$ 極限集合（軌道区間の $\alpha$ 極限集合が $C$ に含まれ、かつ $t \to -\infty$ のとき $\phi$ の軌道区間が $C$ の境界 $\partial C$ に交わらない場合）、または $\phi$ に含まれる軌道区間が $t \to -\infty$ のときはじめて交わる $C$ の境界の連続したセグメントである。$s$ を $\phi$ の起点と呼ぶ。$d$ は $t \to \infty$ とすることによって同様に定義される。$d$ を $\phi$ の終点と呼ぶ。

$C$ を軌道区間束に分割したときにできる軌道区間束の位相構造を流れパターンと呼ぶ。

### 例

微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^2 + 0.2y + 0.3xy \end{cases} \tag{1}$$

の領域 $-3 \leq x \leq 3, -2 \leq x \leq 2$ における流れについて考えてみよう。図 1(a) は (1) 式のこの領域におけるベクトル場、同図 (b) は PSX2NL がこの領域の流れを解析するために描いたものである。

線分 $\overline{TQ}$ と交わる軌道たちは、この線分上の点を折線 $\overline{UGH}$ 上の点に連続的に写像するが、このことは流れ写像によって、

$$\phi_{2,2} : \overline{TQ} \to \overline{UGH}$$

と記述される。ただし、$\phi_{2,2}$ は $\overline{TQ}$ と $\overline{UGH}$ に挟まれた軌道の区間の集まりにつけたラベルである。領域 $MGCD$ 内の流れ $\phi_2$ は、このような流れの和として次のように表現する。

$$\begin{aligned} \phi_2 = \ & \phi_{2,1} : \overline{MT} \to \overline{LM} \oplus \phi_{2,2} : \overline{TQ} \to \overline{UGH} \oplus \phi_{2,3} : Y \to \overline{QU} \\ & \oplus \phi_{2,4} : \overline{KL} \to \overline{HI} \oplus \phi_{2,5} : \overline{CJ} \to \overline{IC} \oplus \phi_{2,6} : \overline{DK} \to \overline{JD} \end{aligned} \tag{2}$$

領域 $ABGM$ についても同様に、

$$\begin{aligned} \phi_1 = \ & \phi_{1,1} : \overline{NAE} \to \overline{EBF} \oplus \phi_{1,2} : \overline{GS} \to \overline{FG} \oplus \phi_{1,3} : \overline{SQ} \to \overline{QR} \\ & \oplus \phi_{1,4} : \overline{PN} \to \overline{RMP} \end{aligned} \tag{3}$$

流れ写像は、流れに関する全ての情報を含んではいないが、流れに関する定性的情報、特に長期的挙動について推論するために必要な情報を含んでいる。

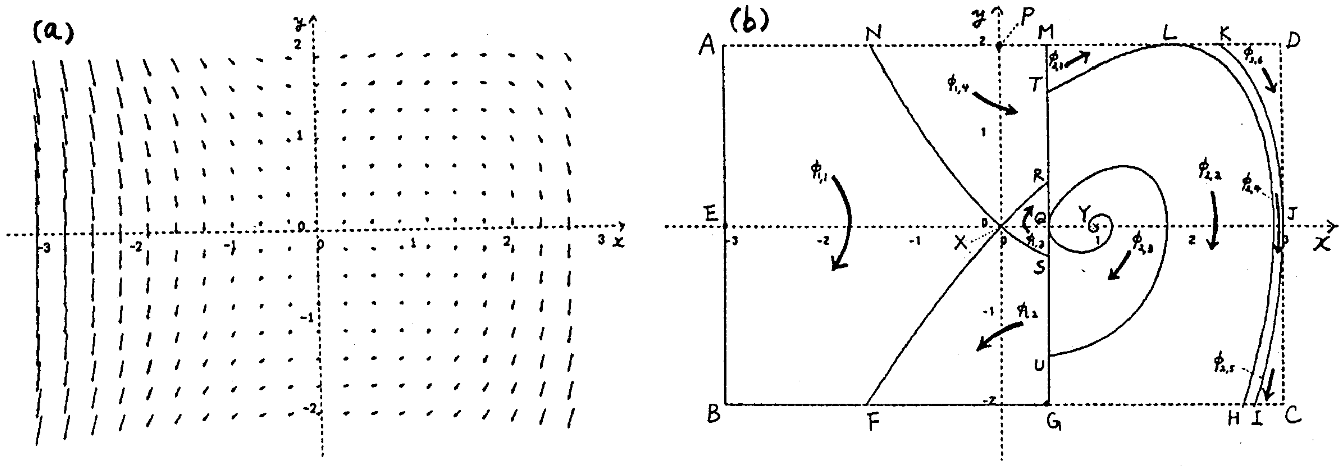


図 1: (1) の $-3 \leq x \leq 3, -2 \leq x \leq 2$ におけるベクトル場 (a) とこの領域を特徴づける軌道 (b)。 ((b) は PSX2NL によって描かれた)

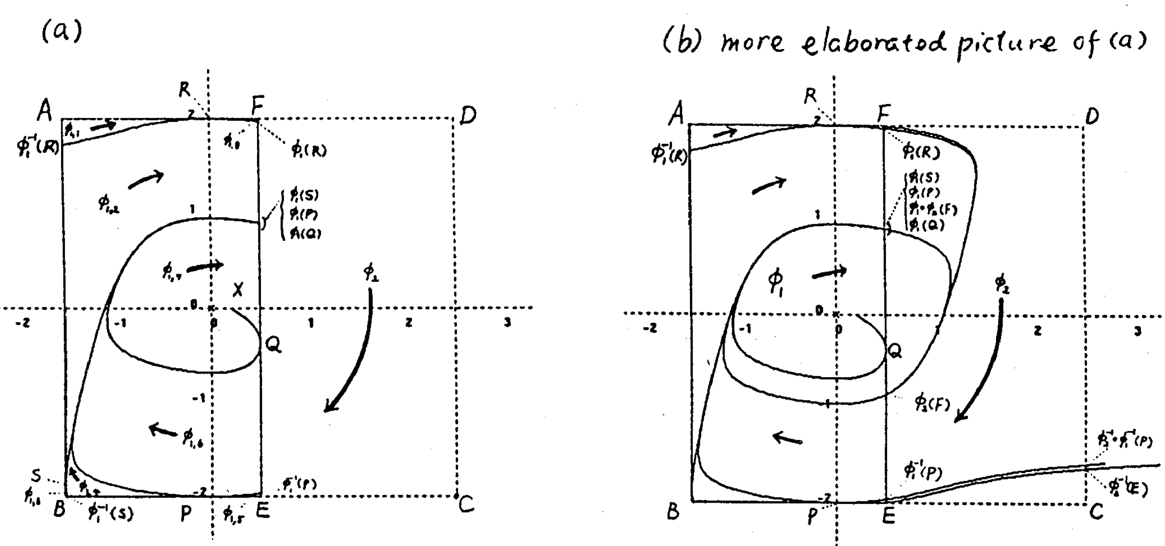


図 2: Van der Pol 方程式 (4) に対する相消像の一部

例えば、 Van der Pol 方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x^3 + 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases} \tag{4}$$

について考えてみよう。図 2(a) にその相消像の一部を示す。流れ写像によって、領域 $ABEF$ における流れ $\phi_1$ は

$$\begin{aligned} \phi_1 = \;& \phi_{1,1} : \overline{A\,\phi_1^{-1}(R)} \to \overline{R\,A} \oplus \phi_{1,2} : \overline{\phi_1^{-1}(R)\,S} \to \overline{\phi_1(S)\,\phi_1(R)} \\ & \oplus \phi_{1,3} : \overline{B\,\phi_1^{-1}(S)} \to \overline{S\,B} \oplus \phi_{1,4} : \overline{\phi_1^{-1}(S)\,P} \to \overline{\phi_1(P)\,\phi_1(S)} \\ & \oplus \phi_{1,5} : \overline{E\,\phi_1^{-1}(P)} \to \overline{P\,E} \oplus \phi_{1,6} : \overline{\phi_1^{-1}(P)\,Q} \to \overline{\phi_1(Q)\,\phi_1(P)} \\ & \oplus \phi_{1,7} : X \to \overline{Q\,\phi_1(Q)} \oplus \phi_{1,8} : \overline{F\,R} \to \overline{\phi_1(R)\,F} \end{aligned} \tag{5}$$

領域 $ECDF$ の流れ $\phi_2$ は

$$\phi_2 : \overline{C\,D\,F\,Q} \to \overline{Q\,E\,C} \tag{6}$$

と記述できる。両者の情報を合わせると、

$$\overline{FQ} \xrightarrow{\phi_2} \overline{Q\,\phi_2(F)} \xrightarrow{\phi_{1,3}} \overline{\phi_1(Q)\,\phi_1\circ\phi_2(F)} \subset \overline{FQ}$$

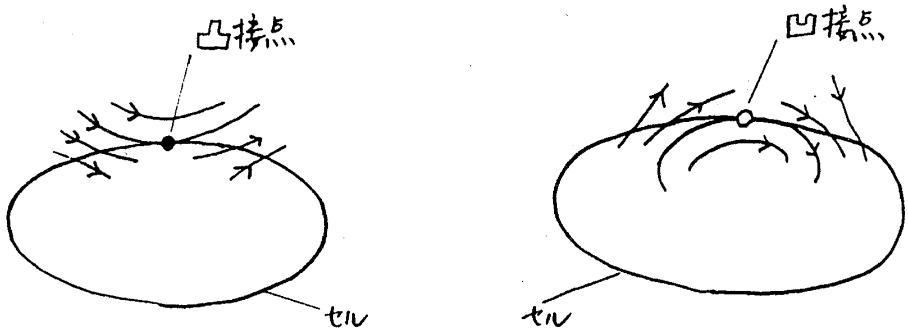


図 3: 凹接点と凸接点

となる（図 2(b) 参照）。これは $\overline{\phi_1(Q)\phi_1\circ\phi_2(F)}$ と交わる極限閉軌道が少なくとも存在し、線分 $\overline{FQ}$ と交わる軌道が $t\to\infty$ でその極限閉軌道（のどれか）に漸近することの数値的な証明となっている。流れ写像による大域的挙動の解析アルゴリズムとその理論的考察については、文献 [12] を参照されたい。

## 3.2 流れパターンの導出

与えられたセルに対する流れパターンを得るためには

- セルの内部に含まれる $\alpha,\omega$ 極限集合の候補となる不動点と極限閉軌道[3]
- 軌道が境界に領域の内側ないしは外側から接する点（接点と呼ばれる）。図 3(a) のように内側から接する点は凹接点、同図 (b) のように外側から接する点を凸接点と呼ぶ。
- 凹接点を通る軌道と境界が交わる点
- 鞍点の安定・不安定多様体と境界が交わる点

などの特徴的な点や領域、および外部から与えられた境界の特徴点とそれを通る軌道が境界と交わる点の位置を知ることが必要である。境界上の凸、凹接点以外の特徴点を境界標 (landmark) と呼ぶ。凸・凹接点と境界標によって区切られた境界のセグメントを境界セグメントと呼ぶ。各境界セグメントでは、流れが境界を横切る向きは同じである。換言すると、各境界セグメントでは流れは一様に領域に入って来るか（入口セグメント）、あるいは領域から出て行くか（出口セグメント）のいずれかである。境界セグメントはさらにいくつかの境界標によっていくつかの区間に区切ることができる。境界セグメント、および境界標または接点で区切られた境界セグメントの区間を境界エッジと呼ぶ。

一般に、セルにおける流れを等質な軌道集合の集まりに分解するためには、セルに含まれる不動点の位置とタイプ、及びセルの境界において流れの向きが変化する点がわかればよい。例えば、図 1(b) の領域 $ABGM$ における流れを特徴づけるのは不動点 $X$、および境界において流れの向きがセルの内側から外側へ反転するところ、すなわち点 $E, G, Q, P$ である。$E, G, Q, P$ は全て凸接点である。一方、領域 $MGCD$ については不動点 $Y$、および境界上の点 $C, J, D, L, M, Q$ である。$C, D, M$ は凸接点、点 $J, L, Q$ は凹接点である。

以上に従って、数式処理や数値計算で直接不動点、凸・凹接点、境界標の位置などを求めようとすると、問題の非線形性のために解を見つけられなかったり、誤差のために定性的に誤った結果が出てしまうことがある。我々は、必要な情報が直接得られる場合のアルゴリズムと、そうでない場合の近似的なアルゴリズムを作成した。近似的なアルゴリズムでは文法的に可能な流れパターンを枚挙する生成器を作成して、部分的な手がかりからの解釈の導出、解析プロセスの制御（導出された解釈のまだ根拠の得られていない部分の同定、その部分の根拠を得るための数式処理・数値計算のプランニング・実行・結果の解釈など）を行なう。詳細については、文献 [5, 6] を参照されたい。

## 4 おわりに

本稿では定性推論の位置付けを行ない、具体的な研究事例として我々の研究室で行なっている相肖像の自動解析について述べた。本稿で述べた相肖像の自動解析プログラムは 2 次元の流れに限定されていたが、これを 3 次元以

[3]本稿では流れは構造安定であると仮定したので、ホモクリニック軌道、ヘテロクリニック軌道のループ状の連なりなどは考えなくてもよい。

上に拡張することが今後の課題である。そのためには、高次元の幾何学的対象の表現形式とそれに基づく推論法の問題と、計算量の問題を解決する必要がある。

## 参考文献


[1] Harold Abelson, Michael Eisenberg, Matthew Halfant, Jacob Katzenelson, Elisha Sacks, Gerald J. Sussman, Jack Wisdom, and Kenneth Yip. Intelligence in scientific computing. *Communications of the ACM*, Vol. 32, pp. 546–562, 1989.

[2] P. Dague, O. Raiman, and P. Deves. Troubleshooting: when modeling is the trouble. In *Proceedings AAAI-87*, pp. 600–605, 1987.

[3] Johan de Kleer and Brian C. Williams. Diagnosing multiple faults. *Artificial Intelligence*, Vol. 32, pp. 97–130, 1987.

[4] B. Alberts 中村, 松原（監訳）. 細胞の分子生物学. 教育社, 1987.

[5] Toyoaki Nishida and Shuji Doshita. A geometric approach to total envisioning. unpublished research note, 1991.

[6] Toyoaki Nishida, Kenji Mizutani, Atsushi Kubota, and Shuji Doshita. Automated phase portrait analysis by integrating qualitative and quantitative analysis. to be presented at AAAI-91, 1991.

[7] Granada Publishing, editor. *How Things Work — The Universal Encycropedia of Mechanism in Two Volumes*. Granada Publishing, 1972. （ドイツで1963年に出版された原書: Wie Funktioniert Das? の英語への翻訳版）.

[8] O. Raiman. Order of magnitude reasoning. In *Proceedings AAAI-86*, pp. 100–104. American Association for Artificial Intelligence, 1986.

[9] 長尾 真他 (編). 岩波情報科学辞典. 岩波書店, 1990.

[10] 西田豊明, 堂下修司. 2次元区分線形微分方程式の挙動の定性解析 (1) 考え方と2次元区分線形微分方程式の挙動の特性の分析. 人工知能学会誌 6 巻 4 号（1991 年 7 月号）掲載予定, 1991.

[11] 西田豊明, 堂下修司. 2次元区分線形微分方程式の挙動の定性解析 (2) 局所解析アルゴリズム. 人工知能学会誌 6 巻 4 号（1991 年 7 月号）掲載予定, 1991.

[12] 西田豊明, 堂下修司. 2次元区分線形微分方程式の挙動の定性解析 (3) 大域解析アルゴリズムと例題. 人工知能学会誌 6 巻 4 号（1991 年 7 月号）掲載予定, 1991.